Teorema della radice quadrata trigonometrica

$$\sqrt[2]{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{sin}\left(\mathbf{arccos}\left(\frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\right)\right)$$

Dim: si procederà verificando innanzitutto il seguente corollario:

Corollario 1

$$\forall\, n\ \in N\ \Rightarrow\ n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

Questo corollario si verifica semplicemente svolgendo i quadrati e semplificando:

$$n = \left(\frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2n}{4}\right) - \left(\frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2n}{4}\right) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\ \ c.v.d.$$

Dal punto di vista geometrico si può affermare che se n rappresenta il cateto minore di un triangolo rettangolo sono noti l'ipotenusa e il cateto grande, infatti applicando il teorema di Pitagora con i dati del precedente calcolo si ricava il valore dell'ipotenusa al quadrato, ovvero:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Dunque, il cateto maggiore al quadrato vale:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

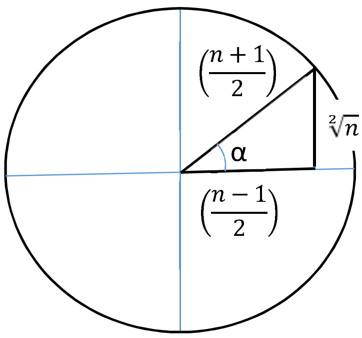
Dal punto di vista trigonometrico si può considerare l'ipotenusa come la lunghezza L del raggio della circonferenza e il cateto minore come il valore $L \cdot \cos(\alpha)$ (vd. figura sotto).

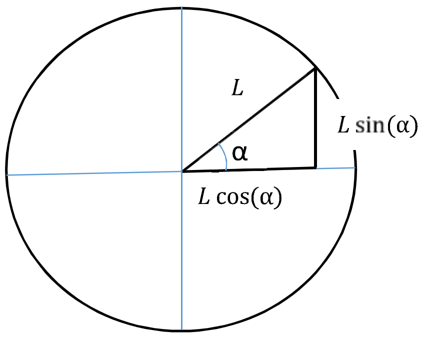
Da quanto visto si può ricavare la radice quadrata del numero n semplicemente applicando alcune formule trigonometriche, in particolare si ha che:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{L\cos(\alpha)}{L}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$





Concludendo si può osservare che:

$$\sqrt[2]{n} = L \cdot \sin(\alpha) = \frac{n+1}{2} \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\right)\ \ \text{c.v.d.}$$